Zahlen als duale Entitäten: Ein konzeptioneller Rahmen für abstrakte Werte, physische Instanziierungen und Cross-Layer-Relativität

Bas Böttcher

November 2025

Abstract

Zahlen werden üblicherweise als rein abstrakte Objekte betrachtet, unabhängig von ihrer physischen Realisierung. In der Praxis erfordert jedoch jede Verwendung einer Zahl ein physisches Substrat – etwa Tinte, Schall, elektronische Zustände oder neuronale Muster. Dieses Papier entwickelt ein konzeptionelles Modell, in dem eine verwendete Zahl als duale Entität $([n], [x])$ beschrieben wird, bestehend aus einem abstrakten Wert $[n]$ und einer physischen Instanziierung $[x]$. Das Modell zeigt auf, wie abstrakte Operationen mit physikalischen Beschränkungen interagieren, warum bestimmte mathematische Ausdrücke (wie die Division durch Null) keine physische Instanziierung besitzen, und führt Replikation als grundlegende Operation auf der physischen Ebene ein.

Ein zentraler Beitrag ist die Entwicklung einer Cross-Layer-Relativität, also der wechselseitigen Beziehung zwischen Abstraktion und physischer Realisierung. Abstrakte Größen beeinflussen die physische Komplexität ($n \to x$), während physische Kapazitäten und Rauschen bestimmen, welche abstrakten Werte überhaupt ausgedrückt werden können ($x \to n$). Darüber hinaus skizziert das Papier eine zusammengesetzte Metrik zur Bewertung der Stabilität und Robustheit physischer Instanziierungen, basierend auf Erkenntnissen aus Informationstheorie, Thermodynamik, Kognitionswissenschaft und Semiotik.

Neben dem Kernmodell liefert das Papier einen historischen Überblick, Implikationen für die Informationstheorie, philosophische Einordnungen, formale Erweiterungen sowie eine Diskussion offener Fragen. Das Ziel ist bescheiden: eine strukturierte Möglichkeit anzubieten, zu analysieren, wie numerische Bedeutung in realen kognitiven, sozialen und technologischen Systemen entsteht.

1 Einleitung

Mathematik wird häufig als Bereich rein abstrakter Entitäten verstanden, weitgehend unabhängig von physischer Realität. Ob man platonische, strukturalistische oder formal-

istische Positionen einnimmt – Zahlen werden meist als unabhängig von den konkreten Medien betrachtet, durch die sie dargestellt oder kommuniziert werden: Tinte auf Papier, Pixel auf Bildschirmen, Schallwellen in der Luft oder neuronale Aktivitätsmuster im Gehirn.

Gleichzeitig ist jede tatsächliche Verwendung von Zahlen untrennbar an physische Träger gebunden. Eine aufgeschriebene Ziffer, ein digital gespeicherter Wert, ein gesprochenes Wort oder ein Gedanke im Gehirn – all diese Formen sind physische Instanziierungen eines abstrakten Zahlenwertes.

Um diese Beziehung systematisch zu beschreiben, führt dieses Papier die Notation ein:

$$([n], [x]) = (\text{abstrakter Wert}, \text{physische Instanziierung}).$$

Diese Doppelstruktur wirft zentrale Fragen auf: Welche abstrakten Operationen lassen sich physisch realisieren? Warum ist die Division durch Null nicht nur mathematisch undefiniert, s ondern a uch p hysisch u nmöglich? W ie b eeinflussen Ra uschen, Energie, Materialität und Interpretationsmechanismen die Bedeutung einer Zahl?

Der hier entwickelte Rahmen soll helfen zu verstehen, wie Zahlen im Zusammenspiel von abstrakter Struktur und physischer Realität funktionieren.

2 Historischer Kontext

2.1 Antike und klassische Traditionen

Die Pythagoreer verbanden Zahlen mit geometrischen Formen und betrachteten sie als Grundstruktur der Welt. Euklids Diagramme waren physische Medien mathematischer Argumentation. Aristoteles unterschied zwischen Form (Struktur) und Materie (Träger) – ein früher Hinweis auf die hier diskutierte Dualität.

2.2 Frühe Neuzeit

Galilei betonte die mathematische Struktur der Natur, gekoppelt an Messprozesse. Descartes verband algebraische Gleichungen mit geometrischen Kurven. Leibniz entwickelte das Binärsystem auch mit Blick auf physische Realisierbarkeit.

2.3 19. und 20. Jahrhundert

Frege und Peano verschoben den Fokus auf logische Abstraktion. Hilbert formaliserte mathematische Systeme unabhängig von physischer Darstellung. Gleichzeitig entstanden Gegentendenzen: Shannon zeigte, dass Information von physikalischen Kanälen abhängt; Turing analysierte Berechnung als physikalisch begrenzten Prozess.

2.4 “Information ist physikalisch”

Landauer zeigte, dass Informationslöschung Energie kostet. Bennett entwickelte reversible Berechnung. Wheeler prägte “it from bit” – die Idee, dass physikalische Realität durch Informationsstrukturen geprägt ist.

2.5 21. Jahrhundert

Neuroscience, verteilte Systeme, Blockchain und maschinelles Lernen verdeutlichen die Abhängigkeit abstrakter mathematischer Strukturen von physischen Instanziierungen.

3 Zahlen als duale Entitäten $([n], [x])$

3.1 Formale Definition

Eine verwendete Zahl wird als Paar $([n], [x])$ verstanden, wobei $[n]$ den abstrakten Wert bezeichnet und $[x]$ die physische Instanziierung dieses Wertes.

3.2 Die abstrakte Ebene $[n]$

Die Ebene $[n]$ umfasst mathematische Werte und Strukturen: ganze Zahlen, reelle Zahlen, symbolische Ausdrücke, Grenzwerte, algebraische Objekte oder unendliche Mengen. Die Mathematik operiert ausschließlich auf dieser abstrakten Ebene, unabhängig von jeder konkreten Darstellung.

3.3 Die physische Ebene $[x]$

Die Ebene $[x]$ umfasst das physische Substrat, in dem der abstrakte Wert realisiert wird: Material, Energie, zeitliche Stabilität, Wellenform, Rauschverhalten und Interpretationsmechanismen.

3.4 Unmittelbare Konsequenzen

Aus der Zweiteilung ergeben sich mehrere Konsequenzen:

- Abstraktion allein genügt nicht für reale Anwendungen – jede Zahl benötigt eine physische Implementierung.
- Zwei identische abstrakte Zahlenwerte können physisch verschieden sein.
- Manche abstrakte Operationen sind physisch nicht instanziierbar.
- Replikation wirkt ausschließlich auf der physischen Ebene $[x]$, nicht auf $[n]$.

3.5 Beispiele

Zu den typischen Paaren $([n], [x])$ gehören:

- die gedruckte Ziffer "7" (abstrakter Wert 7, physische Tinte auf Papier),
- ein in RAM gespeicherter Integer (abstrakte Zahl, konkrete Transistorzustände),
- eine gesprochene Zahl (Schallwelle),
- die neuronale Repräsentation eines Zahlenwertes im Gehirn,
- ein Hash-Wert im Bitcoin-Netzwerk (abstrakter Wert, physische elektrische Zustände).

4 Axiome des Rahmenwerks

4.1 Axiom 1: Duale Repräsentation

Jede verwendete Zahl ist eine duale Entität $([n], [x])$.

Beispiel: Das Schreiben der Ziffer "5" erzeugt das Paar ([5], [Tinte + Papier + Licht + Interpretation]).

4.2 Axiom 2: Strikte Gleichheit

$$([n_1], [x_1]) = ([n_2], [x_2]) \;\Leftrightarrow\; n_1 = n_2 \text{ und } x_1 = x_2.$$

Beispiel: Zwei USB-Sticks, die beide den Wert 42 speichern, unterscheiden sich physisch. Daher gilt $([42], [x_A]) \neq ([42], [x_B])$.

4.3 Axiom 3: Instanziierbarkeit von Operationen

Eine Operation ist nur gültig, wenn sie sowohl abstrakt definiert als auch physisch realisierbar ist.

Division durch Null. Der Ausdruck 12/0 ist nicht nur mathematisch undefiniert, sondern physisch unmöglich: "0" muss selbst physisch instanziiert werden und ist daher nie "reines Nichts".

Beispiel: „0" ist auf der x-Ebene bereits „etwas". Deshalb ist absolutes „Nichts" ausgeschlossen.

4.4 Axiom 4: Grenzwerte und Approximation

Physische Systeme können Grenzwerte nur annähern, niemals exakt erreichen.

Beispiel: Ein Lautsprecher kann eine sehr geringe Lautstärke erzeugen, aber nie perfekte Stille, da thermisches Rauschen stets vorhanden ist.

4.5 Axiom 5: Unendlichkeit und Instanziierung

Unendlichkeits-Symbole sind instanziierbar, unendliche Größen selbst jedoch nicht.

Beispiel: Das gedruckte Symbol "∞" ist eine endliche Tintenstruktur, keine unendliche Entität.

4.6 Axiom 6: Replikationsoperator

Replikation wirkt ausschließlich auf der physischen Ebene:

$$\text{REPLIKATION}_k([n], [x]) = \sum_{i=1}^{k}([n], [x_i]).$$

Beispiel: Sagt ein Lehrer das Wort "eins", entstehen in den Köpfen der Zuhörer viele neuronale Instanziierungen des gleichen abstrakten Werts.

4.7 Axiom 7: Kompositnatur von $[x]$

$[x]$ besteht aus mehreren Dimensionen: Energie, Material, zeitliche Stabilität, Rauschanfälligkeit und Interpretierbarkeit.

Beispiel: Die gesprochene Zahl "sieben" besteht aus Luftdruckschwankungen, stimmlicher Modulation und auditiver Interpretation.

4.8 Axiom 8: Einzigartigkeit physischer Instanzen

Physische Instanziierungen sind nie völlig identisch.

Beispiel: Zwei gedruckte "3"-Ziffern unterscheiden sich auf mikroskopischer Ebene in Tintenverteilung und Papierstruktur.

4.9 Axiom 9: Interpretationsbedingung

Eine Dekodierungsfunktion ist notwendig, um aus $[x]$ den abstrakten Wert $[n]$ zu gewinnen.

Beispiel: Ein OCR-System kann eine verrauschte "9" fälschlich als "4" interpretieren – ein Hinweis, dass Interpretation essenziell ist.

5 Anwendungen

Die Unterscheidung zwischen abstrakter Ebene $[n]$ und physischer Ebene $[x]$ zeigt sich in vielen realen Systemen:

- **Digitale Replikation:** Kopiervorgänge wirken ausschließlich auf $[x]$ (Dateien, Bits), während der abstrakte Zahlenwert unverändert bleibt.
- **Blockchain-Technologie:** Hash-Werte sind abstrakt, ihre Glaubwürdigkeit ergibt sich aus physischem Rechenaufwand (Proof-of-Work).

- **Identitätssysteme:** Eine Identitätsnummer ist abstrakt; ihre Bedeutung hängt von physischen Speichern, Datenbanken und Validierungsmechanismen ab.
- **Gesprochene Zahlen:** "Sieben" ist ein abstrakter Wert, aber seine Realisierung ist eine Schallwelle mit bestimmten akustischen Eigenschaften.
- **Messgeräte:** Anzeigen von Skalen (z.B. Thermometer) sind physische Darstellungen abstrakter Größen.

Diese Beispiele verdeutlichen, dass jede sinnvolle Anwendung von Zahlen auf die physische Ebene angewiesen ist.

6 Cross-Layer-Relativität

Die Cross-Layer-Relativität beschreibt die wechselseitige Abhängigkeit zwischen der abstrakten Ebene $[n]$ und der physischen Ebene $[x]$.

6.1 $n \to x$-Relativität

Abstrakte Eigenschaften beeinflussen die Art der physischen Instanziierung:

- Große Zahlen benötigen mehr Speicher oder komplexere Darstellung.
- Kryptografisch schwierige Werte erfordern hohen Energieaufwand.
- Präzision (z.B. viele Dezimalstellen) erhöht physische Komplexität.

6.2 $x \to n$-Relativität

Physische Eigenschaften begrenzen die Auswahl und Präzision abstrakter Werte:

- Rauschen kann die Rekonstruktion der Zahl verändern.
- Endliche Speicherkapazitäten begrenzen darstellbare Größen.
- Menschliche Wahrnehmung und kognitive Grenzen beeinflussen, welche Zahlen verständlich sind.

6.3 Formales Prinzip

Für jedes $([n], [x])$ gilt:

$$\text{Eigenschaften von } [n] \text{ beeinflussen } [x], \quad \text{Eigenschaften von } [x] \text{ begrenzen } [n].$$

Die Bedeutung einer Zahl ergibt sich somit aus dem Zusammenspiel beider Ebenen.

7 Diagramme

7.1 Diagramm 1: Dualität der Ebenen ($[n], [x]$)

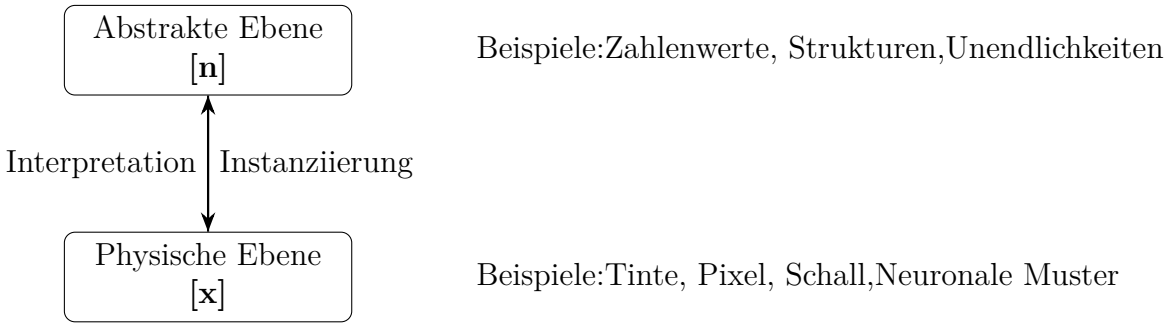

Figure 1: Dualität von abstrakter Ebene $[n]$ und physischer Ebene $[x]$.

7.2 Diagramm 2: Kompakte Cross-Layer-Relativität

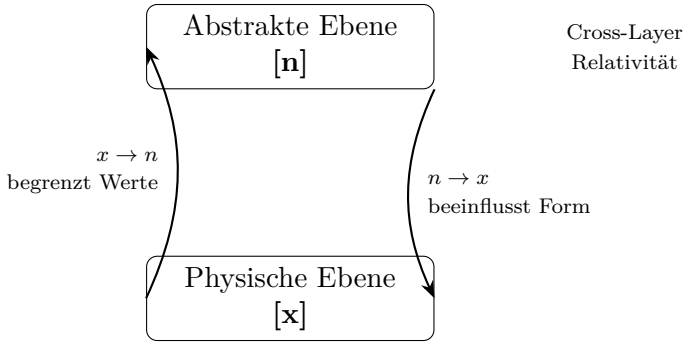

Figure 2: Die Cross-Layer-Relativität beschreibt den wechselseitigen Einfluss zwischen abstrakter und physischer Ebene.

8 Messung der physischen Ebene $[x]$

Um verschiedene physische Instanziierungen vergleichen zu können, ist es hilfreich, die Ebene $[x]$ in mehrere Dimensionen zu zerlegen. Diese Dimensionen bestimmen die Robustheit, Stabilität und Zuverlässigkeit einer Repräsentation.

8.1 Dimensionen der physischen Instanziierung

Typische Dimensionen sind:

- **Energetische Stabilität:** Wie viel Energie wird benötigt, um den Zustand aufrechtzuerhalten?
- **Zeitliche Persistenz:** Wie lange bleibt die Instanziierung bestehen?

- **Materielle Haltbarkeit:** Wie anfällig ist das Medium für Abrieb, Abnutzung oder Zerstörung?
- **Rauschresistenz:** Wie gut widersteht die Instanziierung zufälligen Störungen?
- **Redundanz:** Wird der Wert mehrfach gespeichert oder übertragen?
- **Interpretierbarkeit:** Wie zuverlässig kann ein Interpretationsmechanismus aus $[x]$ wieder $[n]$ extrahieren?

Diese Dimensionen erlauben eine systematische Analyse der Frage, wie "stark" oder "verwundbar" eine physische Repräsentation ist.

8.2 Instanziierungs-Robustheitsindex

Zur Bewertung kann ein zusammengesetzter Index definiert werden:

$$\mathrm{IRI}(x) = f(E, T, D, R, N, I)$$

wobei die Variablen energetische Stabilität (E), zeitliche Persistenz (T), materielle Haltbarkeit (D), Redundanz (R), Rauschresistenz (N) und Interpretierbarkeit (I) repräsentieren.

Dies ist kein endgültiger Vorschlag, sondern eine konzeptionelle Orientierungshilfe.

9 Philosophische Implikationen

Die Dualität $([n], [x])$ berührt mehrere klassische Themen der Philosophie der Mathematik.

9.1 Abstraktion und physische Realisierung

Die Mathematik operiert auf der Ebene $[n]$, doch jeder reale mathematische Vorgang erfordert $[x]$:

- Beweise existieren als Texte oder Gedanken.
- Zahlen existieren als physische Zeichen oder neuronale Aktivierungsmuster.

Damit ist die abstrakte Ebene zwar konzeptuell autonom, aber praktisch abhängig von physischer Instanziierung.

9.2 Semiotik

Die zweistufige Darstellung $([n], [x])$ erinnert an Saussures Signifikant/Signifikat-Struktur, geht aber darüber hinaus:

$[x]$ ist nicht nur ein Zeichen, sondern ein physischer Zustand, der Energie, Materie und Dynamik umfasst.

9.3 Kognition und neuronale Repräsentation

Auf der physischen Ebene repräsentiert das Gehirn Zahlen durch neuronale Muster. Diese Muster begrenzen:

- die Präzision (z.B. Grenzen des Zahlensinns),
- die Größe der darstellbaren Werte,
- die Stabilität des Erinnerns.

9.4 Ontologie von Information

Das Modell steht mit Landauers These im Einklang:

Information ist physikalisch.

Zahlen sind Informationsobjekte und benötigen daher physische Realisierung.

9.5 Unendliche Objekte

Reelle Zahlen mit unendlichen Dezimaldarstellungen oder das Symbol ∞ können nicht vollständig physisch instanziiert werden.

Nutzen und Bedeutung entstehen durch endliche Approximationen.

10 Formale Erweiterungen

10.1 Algebra der Instanziierungen

Nicht jede abstrakte Operation lässt sich physisch instanziieren.

Beispiel: Ein digitales Gerät kann addieren, multiplizieren oder speichern – aber keine Division durch Null ausführen. Der Grund ist nicht nur mathematische Undefiniertheit: Das Gerät selbst benötigt ein physisches Substrat. Damit ist absolute "Nichtsheit" ausgeschlossen; der Akt der Berechnung beweist bereits das Vorhandensein von "etwas".

10.2 Replikation als primitives Konzept

Mathematisch gibt es keinen Operator, der eine Zahl einfach kopiert. Physisch hingegen ist Replikation grundlegend:

$$\text{REPLIKATION}_k([n],[x]) = ([n],[x_1]) + ([n],[x_2]) + \cdots + ([n],[x_k]).$$

Beispiel: Das Kopieren einer Datei erzeugt viele physische Instanzen desselben abstrakten Wertes.

10.3 Interpretationsfunktionen

Interpretation wird formalisiert als Abbildung:

$$\text{Decode} : X \to P(N).$$

Beispiel: Ein OCR-System erkennt ein verrauschtes Pixelsignal nicht eindeutig und ordnet ihm die Menge möglicher Zahlenwerte zu.

10.4 Rauschoperatoren

Rauschen ist ein Operator, der $[x]$ verändert und möglicherweise $[n]$ beeinflusst.

Beispiel: Ein Bitflip in RAM kann aus $([7], [x])$ das Paar $([15], [x'])$ machen.

10.5 Topologische Modellierung

Instanziierungen können als Punkte in einem hochdimensionalen Merkmalsraum modelliert werden.

Beispiel: Unterschiedliche gesprochene Versionen von "sieben" bilden Cluster in einem akustischen Raum.

10.6 Wahrscheinlichkeitsverteilungen als Instanziierungen

Manche Instanziierungen sind fluktuierende Zustände statt fester Werte:

$$([n], [X_{\text{dist}}]).$$

Beispiel: Die Erinnerung an eine zuvor gehörte Zahl driftet über die Zeit.

10.7 Repräsentationelle Äquivalenz

Zwei physische Instanziierungen können funktional äquivalent sein, auch wenn sie sich physisch unterscheiden.

Beispiel: Zwei hochauflösende Scans derselben Ziffer "8" unterscheiden sich in Pixelwerten, aber nicht in ihrer Interpretation.

11 Offene Probleme

Der vorgestellte Rahmen wirft eine Reihe weiterführender Fragen auf, die zukünftige Forschung inspirieren könnten:

- **Formale Modellierung von $[x]$:** Wie lässt sich die physische Ebene mathematisch präzise fassen? Mögliche Ansätze umfassen Topologien, Maßräume oder stochastische Prozesse.

- **Verbindung zu Berechenbarkeit und Komplexität:** Welche abstrakten Werte bleiben prinzipiell unerreichbar, wenn physische Ressourcen begrenzt sind?
- **Thermodynamische Grenzen:** Wie wirken Landauers Prinzip und energieeffiziente Repräsentationen auf die Auswahl abstrakter Werte?
- **Kalibrierung des Robustheitsindexes:** Wie lassen sich die Dimensionen des IRI quantitativ bestimmen?
- **Kognitive Grenzen:** Welche Zahlen können Menschen in welchen Kontexten zuverlässig instanziieren oder erinnern?
- **Grenzen maschineller Repräsentation:** Welche abstrakten Werte werden in ML-Systemen "verzogen" oder nur approximativ dargestellt?
- **Reale Analysis und physische Grenzen:** Können reelle Zahlen jemals hinreichend physisch repräsentiert werden?
- **Philosophische Synthese:** Wie lässt sich das Modell in Strömungen wie Strukturalismus, Empirismus oder Informationsontologie einbetten?

Diese Fragen zeigen, dass die Trennung zwischen abstrakter Zahl und physischer Instanziierung reichhaltige Forschungsfelder eröffnet.

12 Schlussfolgerung: Zahlen zwischen Abstraktion und Realität

Dieses Papier schlägt vor, verwendete Zahlen systematisch als duale Entitäten $([n], [x])$ zu verstehen. Während die Mathematik auf der abstrakten Ebene $[n]$ operiert, erfordert jede praktische Nutzung eine physische Ebene $[x]$.

Die Cross-Layer-Relativität zeigt, dass abstrakte Eigenschaften die physische Instanziierung beeinflussen ($n \to x$), während physische Bedingungen die Menge der darstellbaren abstrakten Werte einschränken ($x \to n$).

Zwei Schlüsselbeobachtungen verdeutlichen die enge Verzahnung beider Ebenen:

Replikation. Mathematisch existiert kein Operator zur bloßen Kopie eines abstrakten Werts. In der realen Welt hingegen hängt jede Form mathematischer Praxis – vom Schreiben bis zur Datenübertragung – von der Replikation physischer Instanzen ab. Mathematische Abstraktion ist daher konzeptuell autonom, aber operativ auf $[x]$ angewiesen.

Division durch Null. Sobald "0" physisch dargestellt wird, ist sie kein "reines Nichts". Das physische Medium, das die Darstellung trägt, ist bereits eine Form des "Etwas". Damit wird die Division durch Null nicht nur aus mathematischen Gründen undefiniert, sondern physisch und ontologisch unmöglich: Ein System, das die Frage stellt, beweist durch seine Existenz bereits, dass absolute Nichtsheit nicht gegeben ist.

Zahlen sind somit doppelte Entitäten: abstrakt und physisch zugleich. Der hier entwickelte Rahmen hilft zu analysieren, wie sie persistieren, sich verändern, übertragen werden und Bedeutung erhalten.

Das Ziel ist bescheiden: Eine Sprache anzubieten, um das Zusammenspiel von mathematischer Struktur und physischer Realisierung besser zu verstehen – dort, wo Zahlen tatsächlich wirken: in kognitiven, sozialen und technologischen Systemen.

Danksagung

Der Autor bedankt sich für die Unterstützung durch KI-basierte Werkzeuge beim Formulieren, Strukturieren und Verfeinern des Textes. Alle konzeptionellen Beiträge, Interpretationen und endgültigen Entscheidungen stammen allein vom Autor.